

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
аэрокосмических технологий  
С.С. Негодяев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Избранные вопросы численного решения систем уравнений гиперболического типа
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная и прикладная физика природных систем Физтех-школа Аэрокосмических Технологий центр образовательных программ ФАКТ
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.В. Конюхов, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Программа обсуждена на заседании центра образовательных программ ФАКТ 02.12.2024

## Аннотация

Широкий спектр математических моделей в механике приводит к гиперболическим системам уравнений в частных производных. В рамках настоящего курса дается обзор различных математических аспектов численного решения таких систем. Рассматриваются приближенные методы решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, применяемые при построении численных методов, принадлежащих типу Годунова, принципы построения схем высокого порядка аппроксимации, в частности, схем TVD, ENO, WENO, ADER. Затрагиваются вопросы применения численных методов сквозного счета при наличии ударных волн высокой интенсивности, методов локального предобуславливания гиперболических систем для расчета течений с малыми числами Маха, а также вычислительные аспекты устойчивости ударных волн.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- развитие знаний и навыков по численному решению систем уравнений гиперболического типа, формирование исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

### Задачи дисциплины

- дать студентам базовые знания в области численных методов гиперболических систем уравнений;
- научить студентов корректно ставить задачу и выбирать метод решения.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определение и основные свойства решений гиперболических систем уравнений;
- примеры систем уравнений гиперболического типа в механике сплошных сред;
- классификацию современных численных методов решения гиперболических систем уравнений.

уметь:

- корректно поставить задачу для системы уравнений гиперболического типа;
- выбирать численный метод решения с учетом специфики решаемой задачи;
- выбрать оптимальные алгоритмы;
- проводить тестирование программ;
- самостоятельно решать задачи, сводящиеся к системам гиперболических уравнений;
- осваивать новые численные методы и алгоритмы;
- эффективно использовать информационные технологии и компьютерную технику для достижения необходимых результатов.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- навыками самостоятельной работы;
- культурой постановки и численного моделирования физических задач;
- навыками грамотной обработки результатов численных расчетов и сопоставления с теоретическими данными.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Гиперболические системы уравнений в механике	8			10
2	Введение в численные методы решения гиперболических систем уравнений	10			10
3	Специальные вопросы численного решения гиперболических систем уравнений	12			10
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

##### 1. Гиперболические системы уравнений в механике

Определение гиперболической квазилинейной системы уравнений 1 порядка. Характеристическая форма гиперболической системы уравнений. Системы уравнений, выражающие законы сохранения в интегральной и дифференциальной форме. Классическое и обобщенное решение. Соотношения на разрывах. Проблема единственности обобщенного решения. Правила отбора, энтропийное решение. Вопросы устойчивости сильных разрывов, эволюционность, условия Лакса. Устойчивость ударных волн в средах с произвольным уравнением состояния.

Волны Римана. Инварианты Римана линейной системы уравнений. Решение задачи о распаде произвольного разрыва для линейной гиперболической системы уравнений.

Структура решения задачи о распаде разрыва для нелинейных гиперболических систем.

Примеры гиперболических систем уравнений в механике. Уравнения Эйлера сжимаемого газа, уравнения релятивистской и магнитной гидродинамики, уравнения нелинейно-упругой среды, уравнения описывающие распространение волн в насыщенной пористой среде. Задачи теории многофазной фильтрации, сводящиеся к гиперболическим уравнениям.

## 2. Введение в численные методы решения гиперболических систем уравнений

Численный метод Годунова. Методы типа Куранта-Изаксона-Риса. Аппроксимация потоков и приближенные решения задачи о распаде разрыва: метод Роу, метод Хартена-Лакса-Ван Лира (HLL), метод HLLC, метод Лакса-Фридрихса. Гибридные методы: Roe-HLL, HLLC- HLL.

Схемы высокого порядка аппроксимации. Полиномиальная реконструкция функций и ограничители. Свойство TVD. TVD-схемы второго порядка аппроксимации. Лемма Хартена.

Противопоточные и центральные TVD- схемы. Метод линий. Интегрирование по времени: TVD схемы на основе метода Рунге-Кутты. Схемы ENO и WENO. Свойства ENO реконструкции. Конечно-разностные и конечно-объемные ENO схемы. Обобщенная задача Римана. О схемах семейства ADER.

## 3. Специальные вопросы численного решения гиперболических систем уравнений

Методы локального предобуславливания для гиперболических систем. Постановка граничных условий для систем уравнений гиперболического типа. Особенности численного интегрирования уравнений, связанные с наличием дифференциальных ограничений; уравнения магнитной гидродинамики, уравнения нелинейной упругости. Многомерная неустойчивость численных решений: карбункул-эффект, численные тесты.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6.Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Монотонные разностные схемы высокого порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа [Текст] : учеб. пособие для вузов / Я. А. Холодов, П. С. Уткин, А. С. Холодов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 69 с.

### Дополнительная литература

1. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 6 : Гидродинамика : учеб. пособие для вузов : рек. М-вом образования Рос. Федерации / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского .— 5-е изд., стереотип. — 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 1986, 1988, 2003, 2006 .— 736 с.
2. Линейные и нелинейные волны [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Дж. Уизем ; пер. с англ. В. В. Жаринова ; под ред. А. Б. Шабата .— М. : Мир, 1977 .— 622 с.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса «Избранные вопросы численного решения систем уравнений гиперболического типа» требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях;
- подготовку к экзамену.

Контроль за работой студента осуществляется в результате индивидуальных консультаций

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Фундаментальная и прикладная физика природных систем Физтех-школа Аэрокосмических Технологий центр образовательных программ ФАКТ
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.В. Конюхов, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Избранные вопросы численного решения систем уравнений гиперболического типа» обучающийся должен:

### знать:

- определение и основные свойства решений гиперболических систем уравнений;
- примеры систем уравнений гиперболического типа в механике сплошных сред;
- классификацию современных численных методов решения гиперболических систем уравнений.

### уметь:

- корректно поставить задачу для системы уравнений гиперболического типа;
- выбирать численный метод решения с учетом специфики решаемой задачи;
- выбрать оптимальные алгоритмы;
- проводить тестирование программ;
- самостоятельно решать задачи, сводящиеся к системам гиперболических уравнений;
- осваивать новые численные методы и алгоритмы;
- эффективно использовать информационные технологии и компьютерную технику для достижения необходимых результатов.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- навыками самостоятельной работы;
- культурой постановки и численного моделирования физических задач;
- навыками грамотной обработки результатов численных расчетов и сопоставления с теоретическими данными.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**



### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Текущий контроль заключается в учете посещения студентами занятий, а также в учете тех или иных видов активности студентов на занятиях, обсуждения возникающих вопросов по текущему материалу и т.п.

При выставлении итоговой оценки первостепенное значение придается ответу на экзамене

#### Примеры заданий для текущего контроля

- 1D система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} h^3 \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} h^3 u \right) = 0,$$

Используя дополнительный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} h^3 u \right) = 0,$$

где  $h$  — высота воды,  $u$  — скорость течения,

привести систему к симметричному виду.

2. Функция Баклея имеет вид

$$S = \frac{1}{1 + (S^* - S)^2},$$

определить амплитуду скачка насыщенности в задаче Баклея-Левретта, если начальная насыщенность пористой среды вытесняющей жидкостью равна нулю.

3. Пусть явная схема записывается в виде

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x} \left( f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n) \right) - \frac{1}{\Delta x} \left( f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n) \right) \right),$$

где  $\Delta t = \tau_{n+1} - \tau_n$ ,

$$f(u) = \frac{1}{2} u^2,$$

показать, что при выполнении условий

$$C_{-j-1/2} \geq 0$$

$$C_{+j+1/2} \geq 0$$

$$C_{-j-1/2} + C_{+j+1/2} \leq 1.$$

данная схема является схемой TVD (Лемма Хартена).

4. Используя аппроксимации

$$U_{\pm j} = \frac{1}{2}U_{\pm j} + \frac{1}{2}U_{\pm j} \pm \frac{1}{2}(U_{\pm j} - U_{\pm j})$$

$$U_{\pm j} = \frac{1}{2}U_{\pm j} + \frac{3}{2}U_{\pm j} \pm \frac{3}{2}(U_{\pm j} - U_{\pm j})$$

$$U_{\pm j} = \frac{1}{6}U_{\pm j} + \frac{5}{6}U_{\pm j} + \frac{1}{3}U_{\pm j} \pm \frac{1}{6}(U_{\pm j} - U_{\pm j})$$

записать WENO реконструкцию третьего порядка точности.

5. Пусть схема  $U^{n+1} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n)$  является схемой TVD, показать, что схема третьего порядка точности по времени

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n)$$

$$U^{n+1} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^n + \frac{1}{4}(U^n - U^n) \pm \frac{1}{4}(U^n - U^n)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^n + \frac{2}{3}U^n \pm \frac{1}{3}(U^n - U^n) \pm \frac{2}{3}(U^n - U^n)$$

также является схемой TVD.

6. В задаче Баклея-Леверетта полный поток фильтрации равен  $W$ , пористость  $\phi$ .

Найти скорость распространения скачка насыщенности, если функция Баклея имеет вид

Промежуточная аттестация по дисциплине «Избранные вопросы численного решения систем уравнений гиперболического типа» проводится в форме экзамена (устного).

Экзаменационный билет включает в себя вопрос по выбору, который самостоятельно выбирается студентом из программы курса и согласовывается с преподавателем.

### **Примеры теоретических вопросов к экзамену:**

1. Характеристическая форма гиперболической системы уравнений. Системы уравнений, выражающие законы сохранения в интегральной и дифференциальной форме.
2. Гиперболические системы уравнений. Законы сохранения. Классические и обобщенные решения. Соотношения на сильных разрывах.
3. Устойчивость ударных волн в средах с произвольным уравнением состояния.
4. Волны Римана. Инварианты Римана линейной системы уравнений.
5. Уравнения Эйлера сжимаемого газа
6. Метод Годунова. Структура решения задачи о распаде разрыва для нелинейных гиперболических систем.
7. Схемы высокого порядка аппроксимации. Полиномиальная реконструкция функций и ограничители.
8. Приближенные методы решения задачи Римана о распаде разрыва для квазилинейных систем уравнений. Метод Рунге. Энтропийная коррекция. Методы HLL, HLLC и Лакса-Фридрихса.
9. Постановка граничных условий для систем уравнений гиперболического типа.
10. Многомерная неустойчивость численных решений: карбункул-эффект, численные тесты.

### **Примеры экзаменационных билетов, используемых для проведения экзамена:**

#### **ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**

1. Вопрос по выбору
2. Гиперболические системы уравнений. Законы сохранения. Классические и обобщенные решения. Соотношения на сильных разрывах.
3. Функция Баклея имеет вид
$$b(S) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(S^{-1} - 1)^2},$$
определить амплитуду скачка насыщенности в задаче Баклея- Леверетта.

#### **ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2**

1. Вопрос по выбору
2. Метод Годунова. Структура решения задачи о распаде разрыва для нелинейных гиперболических систем.

3. Пусть явная схема записывается в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{+,j+1/2} \Delta_{j+1/2} u^n - C_{-,j-1/2} \Delta_{j-1/2} u^n,$$

$$\text{где } \Delta_{j+1/2} u^n = u_{j+1}^n - u_j^n$$

показать, что если выполнены условия

$$C_{-,j-1/2} \geq 0,$$

$$C_{+,j+1/2} \geq 0,$$

$$C_{-,j-1/2} + C_{+,j+1/2} \leq 1.$$

данная схема является схемой TVD.

### ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Вопрос по выбору
2. Приближенные методы решения задачи Римана о распаде разрыва для квазилинейных систем уравнений. Метод Рунге. Энтропийная коррекция. Методы HLL, HLLC и Лакса-Фридрихса.
3. В задаче Баклея-Левретта полный поток фильтрации равен  $W$ , пористость  $\phi$ . Найти скорость распространения скачка насыщенности, если функция Баклея имеет вид

$$b(S) = \frac{3S^2}{3S^2 + (1-S)^2}.$$

#### 4. Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины;

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины;

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины при ответе экзаменационного билета и ответе на вопросы по программе дисциплины;

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту по результатам экзамена, если он твердо знает материал экзаменационного билета, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту по результатам экзамена, если он знает материал экзаменационного билета, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе много неточностей;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту по результатам экзамена, если он знает материал экзаменационного билета, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, не допускает в ответе грубых ошибок;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту по результатам экзамена, если во время ответа экзаменационного билета он показал фрагментарный, характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту по результатам экзамена, если во время ответа экзаменационного билета он показал разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушение логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2-1)» выставляется студенту по результатам экзамена, если во время ответа экзаменационного билета, он показал, что не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена при подготовке ответов на билеты, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, конспектами лекций, семинаров и любой другой литературой.

Во время проведения экзамена при ответе обучающегося на вопросы по билету или по программе дисциплины, он не может пользоваться конспектами лекций и семинаров и любой другой литературой.